

27 Modellierung, Simulation und Optimierung zur Geräuschreduzierung bei Scheibenbremsen

Modellbasierte Auslegung und Verbesserung von modernen Fahrzeugen. Eine Erfolgsgeschichte der Kooperation von Mathematik und Ingenieurwissenschaften.

Moderne industrielle Produkte wie Automobile, Züge oder Flugzeuge sind hochkomplexe Systeme die auf einer Kombination von verschiedenen Gebieten der Ingenieurwissenschaften beruhen, wie z.B. Strukturmechanik, Fluidodynamik, Elektrotechnik, Hydraulik, Verfahrenstechnik. In der Auslegung und Optimierung solcher Systeme spielt die Verwendung von numerischen Simulation auf der Basis mathematischer Modelle und der Optimierung des Systemverhaltens und des Fertigungsprozesses heute eine zentrale Rolle. Wenn man derartig komplexe Systeme durch mathematische Modelle beschreiben will, ist man gezwungen bezüglich der Modellierungsgüte, zwischen Genauigkeit und Rechenzeit bei der Simulation, und der erzielbaren Optimalität Kompromisse zu machen. Die Mathematik liefert dabei die Werkzeuge dieses auf sinnvolle und rationale Weise zu tun, in dem Modelle analysiert und mathematische Algorithmen entwickelt werden, Modellierungs- und Approximations-Fehler quantifiziert werden, sowie Komplexität und Rechenzeit abgeschätzt werden.

Dieses Vorgehen bei der Behandlung eines realen Problems wird am Beispiel der Konstruktion und Verbesserung der Geräuschemission von Scheibenbremsen von Prof. Dr. Volker Mehrmann (Institut für Mathematik, TU Berlin) beschrieben. Für eine mathematisch und mechanisch detaillierte Beschreibung, siehe diesen Artikel²³.

Das Quietschen von Scheibenbremsen bei Kraftfahrzeugen (aber auch bei Bremsen von Fahrrädern oder Zügen) ist ein unangenehmes Geräusch. Eine wesentliche Ursache für das Quietschen ist eine selbsterregte Schwingung der Bremsscheibe, welche durch die Reibungskräfte an der Schnittstelle zwischen Bremsscheibe und Bremsbacke erzeugt wird. In Abbildung 39 ist ein Modell einer gesamten Scheibenbremse inklusive der Aufhängung dargestellt.

In der heutigen industriellen Praxis wird so eine Bremse durch Laborexperimente und durch numerische Simulation auf der Basis eines Finite-Elemente Modells analysiert und verbessert. Dazu wird die Struktur in sehr kleine Quader oder Tetraeder (Finite Elemente) zerlegt und die Auslenkung aus einem Ruhezustand, bzw. die Bewegungsgeschwindigkeiten werden durch stückweise Polynome auf diesen Finiten Elementen approximiert, siehe Abbildung 40 für so eine Zerlegung in finite Elemente. Es ergibt sich ein sehr großes System von Differentialgleichungen. Dabei werden für jedes Finite Element sechs oder mehr Freiheitsgrade (z.B. drei für die Position und drei für die Geschwindigkeit) verwendet. Für eine reale Bremse können das Millionen von Freiheits-

²³N. Gräbner, V. Mehrmann, S. Quraishi, C. Schröder, U. von Wagner, *Numerical methods for parametric model reduction in the simulation of disc brake squeal*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik Vol. 96 (2016), 1388–1405.

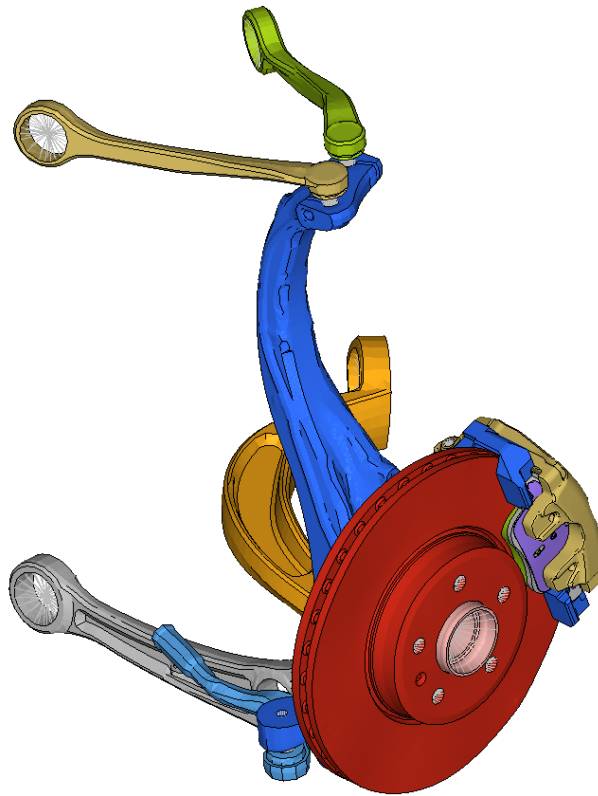


Abbildung 39: Bremsenmodell.

graden sein, je nachdem wie genau die Beschreibung sein soll. Ein großes Problem ist, dass sich die Scheibe natürlich sehr schnell dreht und damit die Koordinaten in einem mitbewegten Koordinatensystem betrachtet werden müssen. Neben der Modellierung der Struktur durch Finite Elemente ist aber insbesondere die Modellierung des Reibungsverhaltens ein sehr schwieriges Problem, da Reibung auf molekularer Ebene stattfindet. Daher verwendet man für die Modellierung der Reibung Ersatzmodelle, die durch Anpassung von Parametern an Messungen aus Experimenten gewonnen werden.

Insgesamt ergibt sich für die zur Zeit industriell verwendete Modellierung eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$M_\omega \ddot{u} + D_\omega \dot{u} + K_\omega u = f,$$

wobei M_ω , D_ω , and K_ω sehr große Matrizen (Größe \approx Anzahl der Freiheitsgrade) die den Zusammenhang zwischen Beschleunigungs-, Geschwindigkeits-, und Positionskoordinaten beschreiben. Diese Koeffizientenmatrizen hängen von verschiedenen Parametern ab, z.B. Materialparametern der Bremse, Abrieb der Bremsscheibe, interner Dämpfung etc. Hier ist nur die Abhängigkeit von der Rotationsgeschwindigkeit ω der Bremsscheibe angedeutet, die in einem bestimmten Parameterbereich variiert wird. Im

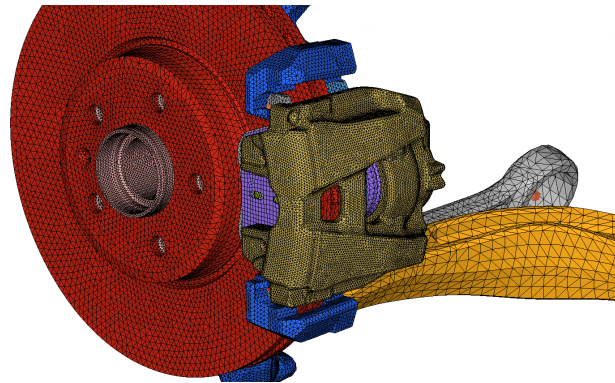


Abbildung 40: Beispiel eines Finite Elemente Modells einer Scheibenbremse.

Gegensatz zu klassischen Modellen für Schwingungen von Balken oder Platten, müssen hier durch die Drehung der Scheibe zirkulatorische und gyroskopische Kräfte berücksichtigt werden, so dass die Matrizen D_ω und K_ω nicht-symmetrisch sind, während M_ω eine symmetrische Massenmatrix ist. Für selbsterregte Schwingungen wird zudem die äußere Kraft f vernachlässigt.

In dieser Modellbeschreibung sind natürlich eine große Anzahl an Vereinfachungen gemacht worden und ein Vergleich mit Laborexperimenten zur Evaluierung bzw. Validierung des Modells ist notwendig, bei dem auch die Güte des Modells (mehr oder weniger gut) quantifiziert wird.

Um die Dynamik des Systems zu verstehen, bzw. Schwingungsmoden der Differentialgleichung zu analysieren und zu verändern, macht man zuerst eine sogenannte Eigenwertanalyse, d.h. man berechnet auf der Basis einer Fourieranalyse, Eigenfrequenzen $\lambda(\omega)$ und Eigenvektoren $x(\omega)$, so dass für gegebenes ω die quadratische Eigenwertgleichung

$$(\lambda(\omega)^2 M_\omega + \lambda(\omega) D_\omega + K_\omega) x(\omega) = 0$$

gilt. Diese Eigenwertanalyse gilt lokal in der Nähe eines Gleichgewichtszustands, und das System ist instabil (und wird mehr oder weniger hörbar) quietschen, wenn es für bestimmte ω Eigenwerte mit positivem Realteil gibt.

Es gibt nun für dieses System $2n$ Eigenwerte (wobei n die Systemgröße ist). Es ist selbst mit heutigen Computerclustern nicht realistisch und auch nicht sinnvoll alle diese Eigenwerte und zugehörigen Eigenmoden für viele Parameterwerte ω zu berechnen um festzustellen bei welchem ω das Quietschen einsetzt und mit welcher Frequenz es quietscht, um dann das Modell auf der Basis von Variationen der Geometrie, Massenverteilung, oder von Materialparametern zu optimieren.

Für die Berechnung der Eigenwerte werden moderne Algorithmen der Numerischen Linearen Algebra (sog. Krylovraumverfahren) verwendet, bei denen man Bereiche vorgeben kann in denen man Eigenwerte sucht. Das heißt man berechnet nur die Eigenwerte in einem bestimmten Bereich der komplexen Zahlenebene. Diese Methoden sind

bzgl. ihrer Fehleranfälligkeit sehr gut untersucht und man kann die Fehler in den Approximationsmethoden abschätzen und auch an die Modellierungsfehler anpassen, so dass man eine Abschätzung für den Gesamtfehler von Modellierungs- und Eigenwertberechnungsfehlern durchführen kann.

Die Analyse der Eigenfrequenzen und Schwingungsmoden ist damit möglich, aber extrem rechenintensiv, insbesondere wenn dann noch über die Parameter optimiert werden soll. Aus diesem Grund wird zuerst einmal ein sehr kleines parameterabhängiges reduziertes Modell erzeugt, welches für Parameteroptimierung verwendet werden kann. Es gibt eine Vielzahl von Modellreduktionsmethoden. Dazu wird das große Problem auf ein kleines Problem projiziert, indem die Eigenvektoren $x(\omega)$ in einem Unterraum gesucht werden, der durch die orthonormalen Spalten einer $n \times d$ Matrix Q aufgespannt wird, wobei d in einer Größenordnung von maximal einigen Hundert ist. Die klassische Methode (modal truncation) im Industrieinsatz verwendet die Eigenvektoren des Matrixpaares $\lambda M + K_1$ wobei K_1 ein symmetrischer Teil von K ist zu den größten Eigenwerten (diese sind alle real und negativ). In einem modernen Ansatz¹, in dem die Fehler wesentlich geringer sind, wird eine Matrix Q so berechnet, dass in einem großen Parameterbereich die relevanten Eigenwerte des reduzierten Modells (d.h. die mit positivem Realteil), diejenigen des vollen Modells gut approximieren, und dies mit einer Fehlerabschätzung. Dazu werden die entsprechenden Eigenwerte und Eigenvektoren des vollen Modells für einige zufällig gewählte ω -Werte im Untersuchungsbereich berechnet und anschließend wird mit Hilfe einer Singulärwertzerlegung (engl. Proper Orthogonal Decomposition (POD)) aus diesen ein kleiner Raum erzeugt, der im gesamten Parameterbereich verwendet werden kann.

Natürlich wird bei der Modellreduktion ein weiterer Modellreduktionsfehler gemacht, der bei einer guten Reduktionsmethode in der gleichen Größenordnung der anderen bisher gemachten Fehler liegen sollte.

Eine Illustration verschiedener Fehlermaße in Abhängigkeit von der Dimension des reduzierten Modells für zwei industrielle Finite Elemente Modelle M_1 und M_2 und das klassische sowie das neue Verfahren ist in Abbildung 41 dargestellt.

Man sieht sehr schön, dass die POD Methode, mit einem sehr kleinen d sehr kleine Fehler in den Eigenwerten err_λ und Eigenvektoren err_x produziert. Zu diesen Fehlern gibt es zudem eine Fehlerabschätzung, die es erlaubt die Größe d und die Anzahl der gewählten Auswertungspunkte adaptiv zu steuern. Im Vergleich dazu stagniert der Fehler bei der klassischen Methode auch bei Vergrößerung des Raums.

Neben der Fehlerabschätzung ist dann auch jeder Auswertungsschritt in der Parameteroptimierung sehr viel kostengünstiger (im Schnitt 30 mal schneller als mit dem klassisch reduzierten Modell), wenn man das so reduzierte Eigenwertproblem

$$(\lambda(\omega)^2 Q^\top M_\omega Q + \lambda(\omega) Q^\top D_\omega Q + Q^\top K_\omega Q) x_d(\omega) = 0$$

löst. Damit können jetzt effizient die Scheibenbremsen verbessert werden und die Methode hat ebenfalls dazu geführt, dass in realen Beispielen Instabilitäten (Eigenwerte mit positivem Realteil) entdeckt wurden, die der klassische Modellreduktionsansatz nicht gefunden hatte.

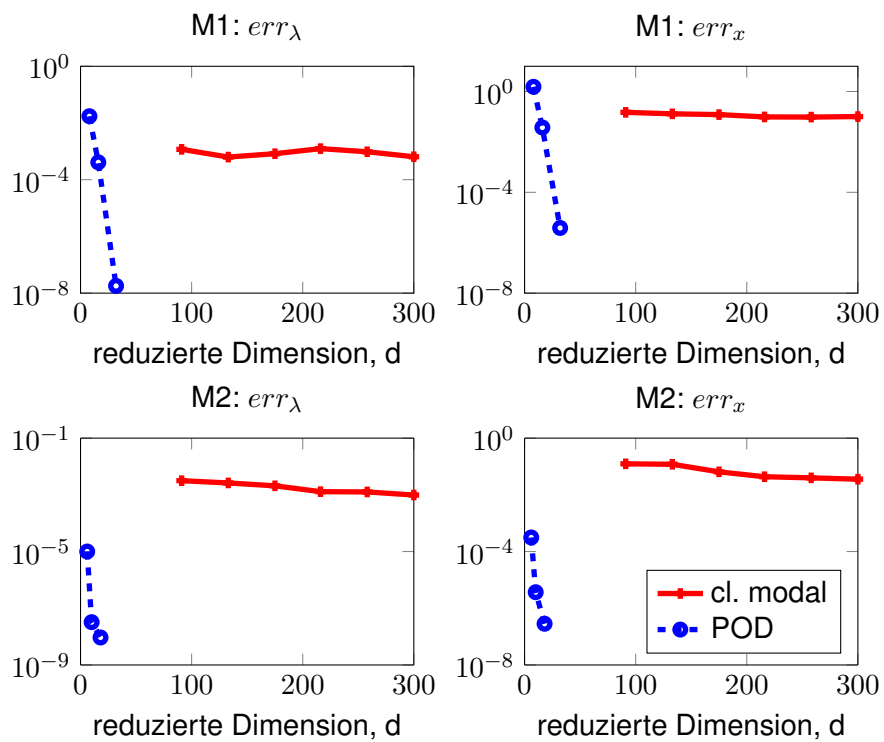


Abbildung 41: Abhängigkeit der Fehlergüte von der reduzierten Dimension d für zwei industrielle Modelle M_1 und M_2 , sowie klassische und moderne Modellreduktionsmethoden.

Die neue Methode wurde als Open Source Python Skript implementiert und ist allgemein frei verfügbar.

An diesem Beispiel aber auch einer Großzahl von anderen Anwendungen wird deutlich, welche Beiträge die moderne Mathematik leistet um in allen Wissenschaftsbereichen die Methoden und das Verständnis zu verbessern.