

## 64 Liebeslyrik: Petrarca und Laura – Chaos in Liebesaffären

Dynamische Systeme beschreiben Liebesbeziehungen und helfen so Gedichte aus dem Mittelalter zu sortieren.

In diesem Kapitel wollen wir diskutieren, inwieweit man Liebe als ein (deterministisches) mathematisches Modell betrachten kann. Obwohl Liebe häufig als etwas spontan gesteuertes, ohne jegliche Struktur beschrieben wird („Liebe auf den ersten Blick“), wollen wir ein Modell aufstellen und es anhand von berühmten Beispielen von Beziehungen wie Romeo und Julia, Petrarca und Laura oder Jack und Rose (Film 'Titanic') kalibrieren. Dabei werden Gefühle wie Angst, Zuneigung, Sehnsucht, Verlangen oder auch Abneigung betrachtet und Liebe als eine Reaktion auf dieses definiert.

Steven Strogatz gilt als einer der Pioniere auf diesem Gebiet: er formulierte ein System von Differentialgleichungen, um die Dynamik der Liebe zu beschreiben. Was zunächst nur als amüsante Motivation für seine Studenten gedacht war, entwickelte sich rasch zu einem eigenen Gebiet der sog. dynamischen Systeme<sup>44</sup>.

### Das Grundmodell

Das Modell von Strogatz beschreibt unter Berücksichtigung der Persönlichkeiten die Interaktion zweier Menschen, und zwar im folgenden 2 Größen, die Liebenden. Die eigene Persönlichkeit spielt eine Rolle bei der Reaktion auf die Gefühle des anderen; zum Beispiel kann ein narzisstisch veranlagter Mensch die Gefühle des Partners nicht erwidern. Trotzdem liebt er das Gefühl, selbst geliebt zu werden. Eine selbstbewusste Person würde immer auf Annäherungen des Geliebten mit Annäherungen reagieren.

Auch die eigene Lebensgeschichte kann diese Reaktionen beeinflussen; wurde man von der ersten Liebe enttäuscht oder gekränkt, ist man bei der nächsten Beziehung etwas vorsichtiger und reagiert nicht übermäßig auf die Gefühle des anderen.

In diesem Modell werden zeitnahe Reaktionen angenommen; es können z.B. keine Fernbeziehungen simuliert werden, da hier ein zeitlicher Verlust der Gefühle stattfindet. Liebe ist im Modell die direkte Reaktion auf eine Aktion des Gegenübers, die wieder zu einer Reaktion und zu einer Aktion usw. führt.

Es können auch Gefühlszustände simuliert werden, die eine gewisse Zeit brauchen, um zu entstehen oder zu verschwinden, z.B. Depressionen oder emotionale Taubheit. Die wichtigste Annahme ist, dass die simulierten Personen Gefühle lesen und interpretieren können. Sonst wäre eine Reaktion nicht möglich und das Modell sinnlos. Wir erwähnen, dass das Modell nicht das allgemeine Bauchgefühl, sondern nur die äußeren Reaktionen berücksichtigt.

<sup>44</sup>S.H. Strogatz, *Love affairs and differential equations*, Mathematics Magazine, 61(1) (1988), 35-35.

Die zwei folgende Modelle sind linear, also eher einfach gehalten, damit eine weitere Analyse noch möglich ist. Sie haben die Form

$$\dot{X}(t) = \alpha_1 X(t) + \beta_1 Y(t),$$

$$\dot{Y}(t) = \beta_2 X(t) + \alpha_2 Y(t).$$

Dabei beschreiben  $X = X(t)$  und  $Y = Y(t)$  die Gefühle der zwei liebenden Personen dar: Liebe bei positiven und Abneigung bei negativen Werten. Die Faktoren  $\alpha_1, \alpha_2$  beschreiben den Einfluss der eigenen und  $\beta_1, \beta_2$  den der Gefühle des anderen auf die aktuelle Liebe dar. Der Punkt über  $X, Y$  steht für die zeitliche Ableitung.

### Romeo und Julia

Dieses Modell wurde von Strogatz zur Motivation seiner Studenten benutzt. Es beschreibt sehr stark vereinfacht den Verlauf der Liebesbeziehung von Romeo ( $X$ ) und Julia ( $Y$ ) nach dem Theaterstück von William Shakespeare: Julia wird von Romeo umworben, allerdings sind ihre Familien verfeindet und verbieten diese Liebe. Schließlich brennen beide durch und es kommt zum tragischen Tod beider. Man könnte daher als Parameter nehmen:

$$\alpha_1 = 0.05, \quad \alpha_2 = -0.3, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0.1, \quad X(0) = 9, \quad Y(0) = 3.$$

Die positiven  $\beta_1, \beta_2$  beschreiben die starke Reaktion auf die Gefühle des anderen. Romeo ist ein junger Mann, der durch die Gefühle beider nur angespornt wird, also ein positives  $\alpha_1$ . Dagegen hat Julia ein negatives  $\alpha_2$ , reagiert also negativ auf die eigenen Gefühle, da sie als junges Mädchen ihre Familie nicht enttäuschen will und somit ihre eigenen Gefühle nicht akzeptiert. Die Startwerte  $X(0), Y(0)$  wurden unter der Berücksichtigung der physischen Attraktivität gewählt. Das Zeitintervall ist angelehnt an das Stück 30 Tage.

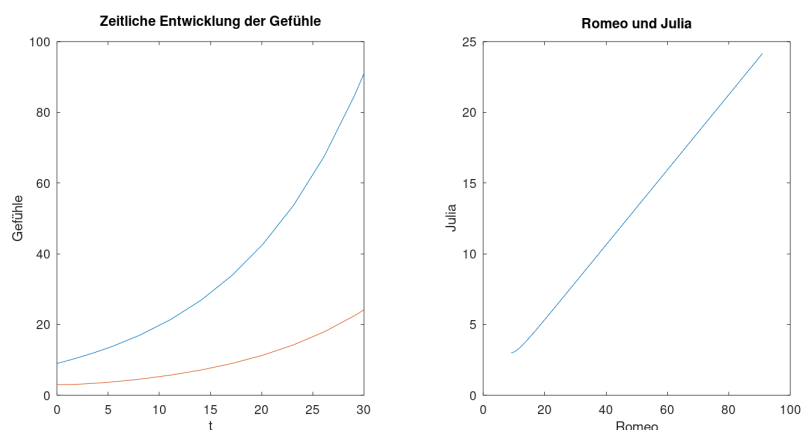


Abbildung 75: Zeitliche Entwicklung der Gefühle (links) und Romeo vs. Julia (rechts).

Man sieht in Abbildung 75, dass sich bei der einfachen Modellierung die Liebe sehr linear entwickelt. Sie steigt nach ihrer ersten Begegnung stetig an und die beiden Liebenden verstärken sich gegenseitig. Es gibt keine Höhen und Tiefen in der gegenseitigen Zuneigung, kein Schwanken einer der Parteien oder sonstige wirkliche Interaktion, wie sie in Shakespears Stück vorkommen.

Um einen näheren Liebesverlauf an das Theaterstück zu haben, kann man das Modell wie folgt erweitert:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \alpha_1 X(t) + \beta_1 Y(t) + r_1 A_2 - bY(t - \tau), \\ \dot{Y}(t) &= \beta_2 X(t) + \alpha_2 Y(t) + r_2 A_1.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen  $A_1$ ,  $A_2$  Konstanten für die Attraktivität des jeweiligen Partners. Die Faktoren  $r_1$ ,  $r_2$  beschreiben die jeweilige Reaktion auf die Attraktivität des anderen. Der Term  $-bY(t - \tau)$  ist ein Verzögerungsterm; er beschreibt eine zeitversetzte Reaktion Romeo auf Julias Gefühle ('Überdenken').

Aus dem Theaterstück entnehmen wir: die Attraktivität von Julia ist höher als die von Romeo ( $A_2 > A_1$ ), die überdachte Reaktion Romeos auf Julias Gefühle ist kleiner als die direkte Reaktion ( $b < \beta_1$ ). Das Modell simuliert auch den Zustand, wenn Romeo und Julia nicht gestorben wären. Sie hätten sich sicherlich nach relativ kurzer Zeit getrennt und das wäre kein 'schönes' Ende für eine der bekanntesten Liebestragödien gewesen.

## Petrarca und Laura

Das zweite Modell wurde von Sergio Rinaldi entwickelt<sup>45</sup>. Die Motivation dabei war, mithilfe eines Liebesmodells die ungeordneten Gedichte des berühmten Dichters Francesco Petrarca aus dem Mittelalter zeitlich zu ordnen. Diese Gedichte resultieren aus der Inspiration der unerwiderten Liebe zu Laura.

Beschreiben wir zunächst die zwei Personen. Petrarca war ein berühmter italienischer Dichter des 14. Jahrhunderts. Er war 23 Jahre alt und ein wenig attraktiver Mann, als er Laura zum ersten Mal traf. Wie viele Dichter zu der Zeit, war er gesellschaftlich nicht hoch angesehen. Dagegen war die 16-jährige Laura eine sehr attraktive, jungverheiratete Frau und hatte einen hohen gesellschaftlichen Stand.

Aus ihrer ersten Begegnung entstand eine 27-jährige unerwiderte Liebe von Petrarca zu Laura, die die literarische Inspiration von Petrarca lieferte und er begann Liebesgedichte zu schreiben. Trotz des Todes von Laura nach 27 Jahren, war Petrarca noch darüber hinaus mehrere Jahre inspiriert und schrieb insgesamt rund 200 Gedichte an sie.

Das resultierende Modell von Rinaldi basiert auf dem Grundmodell, das um eine dritte

<sup>45</sup>S. Rinaldi, *Laura and Petrach: An intriguing case cyclical love dynamics*, SIAM J. Appl. Math. 58(4) (1998), 1205-221

Gleichung ergänzt wurde:

$$\begin{aligned}\dot{L}(t) &= -\alpha_1 X(t) + \beta_1 A_P + R_L(P(t)), \\ \dot{P}(t) &= -\alpha_2 P(t) + \beta_2 \frac{A_L}{1 + \delta Z(t)} + \beta_2 L(t), \\ \dot{Z}(t) &= -\alpha_3 Z(t) + \beta_3 P(t).\end{aligned}$$

Dabei stehen  $L$  und  $P$  für die Liebe von Petrarca und Laura. Die Faktoren  $\alpha_i, \beta_i, A_P, A_L$  sind analog zu denen aus dem Romeo-Julia-Modell definiert. Dabei ist nun  $\alpha_i$  der Vergessensfaktor. Damit ist gemeint, dass Liebe nach einiger Zeit ohne Auffrischung abebbt. Weiter stehen diesmal  $\beta_1$  für die Reaktion auf Petrarcas Attraktivität und  $\beta_1$  für die Reaktion sowohl auf die Attraktivität als auch auf die Inspiration und Liebe Lauras. Die dritte Gleichung beschreibt die Inspiration Petrarcas ( $Z$ ) und geht linear aus den beiden Liebesfaktoren von Laura und Petrarcas hervor.

Die Reaktionsfunktion  $R_L$  in der ersten Gleichung, also die Reaktion von Laura auf Petrarcas Liebe, ist nicht-linear zu beschreiben. Man kann sie aus folgenden Zusammenhang herleiten: Sie fühlt sich zum einen von seine Liebeleien geschmeichelt. Aber wie es zu der Zeit und dem Stand üblich war, musste ein verheiratete Frau irgendwann diese Schmeicheleien negativ auffassen. Anders herum, wenn Liebe von Petrarca in Verzweiflung umschlägt, empfindet sie irgendwann Mitleid. Dieses Mitleid führt dazu, dass sie positiv auf seine Schmeicheleien reagiert. Die daraus resultierende Reaktionsfunktion sieht wie folgt aus

$$R_L(P) = \beta_1 P \left( 1 - \left( \frac{P}{\delta} \right)^2 \right)$$

Die zweite Gleichung wurde im Vergleich zum Grundmodell noch um die Inspiration ( $Z$ ) erweitert. Um die Konstanten anzupassen, ist es wichtig die datierten Gedichte zu verstehen. Aus der Interpretation von Rinaldi ergibt sich folgender Zusammenhang für den Vergessensfaktor  $\alpha_i$ . Er ist bei Laura dreimal so hoch wie bei Petrarca ( $\alpha_1 = 3 \cdot \alpha_2$ ). Währenddessen die Inspiration zehnmal so lange anhält ( $\alpha_2 = 10 \cdot \alpha_3$ ). Die Liebesreaktionsfaktoren  $\beta_i$  lässt sich auf ähnliche Weise beschreiben. Petrarca reagiert auf Lauras Liebe fünfmal so heftig wie sie ( $\beta_2 = 5 \cdot \beta_1$ ). Die Inspiration ist sogar zehnmal so stark ( $\beta_3 = 10 \cdot \beta_1$ ). Das resultiert aus der einseitigen Liebe. Daraus ergeben sich die Anfangswerte  $L(0) = P(0) = Z(0) = 0$  und die folgenden Parameter

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 3, & \alpha_2 &= 1, & \alpha_3 &= 0.1, & \beta_1 &= 1, & \beta_2 &= 5, & \beta_3 &= 10, \\ A_P &= 1, & A_L &= 2, & \delta &= 1.\end{aligned}$$

Die gesamte Laufzeit des Modells ist die Lebenszeit von Laura, also 27 Jahre. Die Werte wurden so gewählt, dass der Liebesverlauf von Petrarca analog wie die Analyse der datierten Gedichte verläuft. Es wird deutlich, dass das Modell die Beziehung aus der Sicht von Petrarca gut einfängt. Desweiteren sieht man, dass sich Petrarca und Laura im einem Wirbel der Gefühle befinden. Wie man in Abbildung 76 erkennen kann, ist die Liebe beider in einem Kreislauf (sog.  $LP$ -Kreis) gefangen.

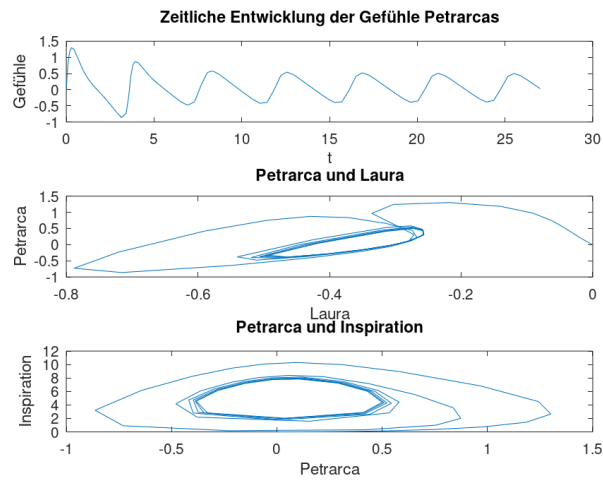


Abbildung 76: Zeitliche Entwicklung der Gefühle Petrarca und Lauras.

Die Gefühlswelt von Petrarca schwankt von absoluter Liebe hin zu absoluter Verzweiflung und wieder zurück zu einem Liebeshoch. Dementsprechend entwickelt sich auch Petrarca's Inspiration. Man kann nach der Sortierung durch die Inhalte der Gedichte die Parameter des Modells noch anpassen (siehe Abbildung 77).

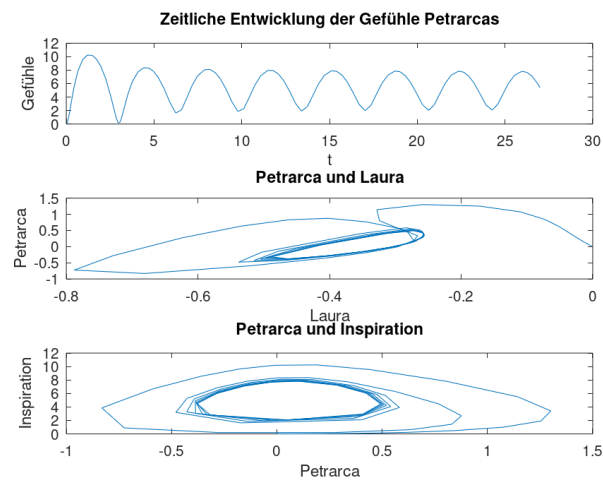


Abbildung 77: Gefühle Petrarca und Lauras nach Fit an Gedichte.