

## 68 Der optimale Freiwurf im Basketball

Wenn ein Basketballer, wie etwa Shaquille O'Neal oder Dirk Nowitzki, zum Freiwurf antritt, überlegt er sich vermutlich nicht wie er den Abwurfwinkel und die Abwurfgeschwindigkeit des Balles wählt, sondern er wirft den Ball intuitiv Richtung Korb, um die Wahrscheinlichkeit eines Korberfolges zu maximieren.

In diesem Kapitel wollen wir anhand des Freiwurfs im Basketball den Prozess der Mathematischen Modellierung erklären und so die Frage beantworten „Wie kann man die Trefferquote beim Freiwurf verbessern?“ Nach einer Modellierung des betrachteten meist komplexen Vorganges muss häufig das Modell vereinfacht werden (z.B. um Lösungen in Echtzeit zu bekommen). Anschliessend muss man Verfahren für die numerische Berechnung von approximativen Lösungen diskutieren (hier: ableitungsfreie Mehr-Ziel-Optimierungsalgorithmen). Weiterhin wollen wir am Ende erklären, wie man mithilfe von sog. *Voronoi-Diagrammen* die Zonen-Abwehr im Basketball optimieren kann.

Weitere wichtige Fragen wären: wie wirkt sich der Luftwiderstand auf die Flugbahn des Balles aus? Wohin sollte man eigentlich am besten zielen; an die Vorder- oder Rückseite des Ringes oder in die Mitte des Korbes oder ...? Welchen Fehler (d.h. Abweichung von den optimalen Parametern) darf man sich erlauben, um trotzdem einen Korberfolg zu erzielen? Wir betrachten also im folgenden einen Basketballspieler einer bestimmten Größe und wollen diese Fragen beantworten.

Bei einem Freiwurf verlässt der Basketball die Wurfhand des Spielers mit einem bestimmten Abwurfwinkel und einer Abwurfgeschwindigkeit (und evtl. einem Spin); die weitere Flugbahn wird durch Bewegungsgleichungen beschrieben. Der Korberfolg kann unterschiedlich passieren: mit/ohne Berührung des Rings, nach Abprallen vom sog. Backboard oder nach mehrmaligem Hin- und Herspringen zwischen Teilen des Rings und des Backboards.

Wir treffen machen einige Annahmen, um zu einem einfachen Modell zu kommen. Wir betrachten nur Würfe, bei denen der Basketball direkt ins Netz trifft oder zuerst die Hinterkante des Ringes trifft und dann direkt ins Netz geht. Wir vernachlässigen den Einfluss des Luftwiderstands und auch des Spins (weil wir Abpraller vom Backboard nicht betrachten. Weiterhin vernachlässigen wir seitliche Fehler in der Flugbahn, so dass uns Bewegungsgleichungen in zwei Dimensionen (Höhe, Entfernung) ausreichen.

Mit diesen Annahmen kann man die Flugbahn des Basketballs bei vorgegebenen Abwurfwinkel  $\theta^0$  mithilfe von Differentialgleichungen beschreiben und bekommt nach einiger Rechnung<sup>48</sup> eine Aussage, welcher Abwurfwinkel  $\theta^0$  die größtmögliche Abweichung zulässt. Dazu bezeichnen wir mit  $\theta_{\min}^0$  und  $\theta_{\max}^0$  den kleinsten bzw. größten abweichenden Winkel  $\theta$ , bei dem der Freiwurf gerade noch zum Treffer führt, d.h. bei einem erfolgreichen Wurf muss der Abwurfwinkel  $\theta^0$  im Intervall  $[\theta_{\min}^0, \theta_{\max}^0]$  liegen.

<sup>48</sup>J.M. Gablonsky, A.S. Lang, *Modelling Basketball Free Throws*, SIAM Review 47 (2005), 775-798.

Mathematisch kann man eine *Zielfunktion*

$$e(\theta^0) = \min\{(\theta^0 - \theta_{\min}^0), (\theta_{\max}^0 - \theta^0)\}$$

eingeführen und die Aufgabe als sog. *Max-Min-Problem* definieren: Bestimme denjenigen optimalen Abwurfwinkel  $\theta_{\text{opt}}^0$ , für den die Zielfunktion  $e(\theta^0)$  maximiert wird. ihr Maximum annimmt. Diese Zielfunktion hängt natürlich von vielen weiteren Parameter ab, z.B. Abwurfgeschwindigkeit  $v^0$ , Größe des Spielers  $h_s$ , usw.. Übrigens, diese Zielfunktion  $e(\theta^0)$  ist zwar stetig, aber nicht überall differenzierbar, denn sie hat offensichtlich einen „Knick“. Es stellt sich heraus, dass es besser ist Abwurfgeschwindigkeit und -winkel gleichzeitig zu optimieren, man spricht dann von *Mehrzieloptimierung*.



Abbildung 78: Ein Vortrag über den optimalen Freiwurf beim Basketball Zweitliga-Verein RSV Stahnsdorf

Bei der Zonen-Abwehr im Basketball (oder auch Raumdeckung im im Fußball) möchte man eher ein Min-Max-Problem lösen: der maximale Abstand von Abwehrspielern und gegnerischen Angriffsspielern soll minimiert werden. Dazu gibt es ein einfaches mathematisches Werkzeug, das *Voronoi-Diagramm*. Dabei wird das Spielfeld in Bereiche (sog. Zellen) zerlegt, die durch vorgegebene Punkte (sog. Zentren, also den Spielern) bestimmt werden. Jeder solche Voronoi-Zellen hat genau ein Zentrum und umfasst alle Punkte des Spielfeldes, die (bzgl. der euklidischen Norm) näher an dem Zentrum der Zelle liegen als an jedem anderen Zentrum. Aus allen Punkten, die mehr als ein nächstgelegenes Zentrum besitzen und somit die Grenzen der Zellen bilden, entsteht das Voronoi-Diagramm.

Man kann sich vorzustellen, dass ein Spieler den Punkt des Basketballfeldes, auf dem er steht, vollständig 'besitzt', dass er keine Kontrolle über einen sehr weit entfernten Punkt hat und nur eine geringe Kontrolle über einen Punkt in der Nähe hat (z.B. 1,5 m entfernt) – außer vielleicht, wenn ein anderer Spieler noch näher an diesem Punkt steht.

Auf dem Spielfeld sind die Regionen unterschiedlich wertvoll (wie bei Immobilien) und die Spieler handeln rational, d.h. sie tauschen bei ihren Bewegungen (und der Bewegung des Balls, Gegners) ihre Spielfeldbereiche derart, dass sie eine Gewinnstrategie für ihr Team darstellen.

In diesem Sinne führten Cervone, Bornn und Goldsberry ein ein „gewichtetes Voronoi“-Konzept ein, um den Platzbesitz eines jeden Spielers zu einem beliebigen Zeitpunkt zu definieren<sup>49</sup>. Sie unterteilten das Halbfeld zunächst in  $M = 576$  gleich große Zellen, jeweils etwa  $60\text{cm} \times 60\text{cm}$ . Für Spieler  $i$  bezeichnet  $X^i(t)$  einen  $M$ -dimensionalen Vektor, der seinen Besitzwert in jeder der  $M$  Spielfeldzellen zum Zeitpunkt  $t$  darstellt. Der  $m$ -te Eintrag von  $X^i(t)$  ist nur dann umgekehrt proportional zur Entfernung ('dist') zwischen Spieler  $i$  und Spielfeldzelle  $m$  zum Zeitpunkt  $t$ , wenn kein anderer Spieler näher an der Spielfeldzelle  $m$  ist:

$$w_m^i(t) = \text{dist}(\text{Spieler } i, \text{ Spielfeldzelle } m) \quad \text{zur Zeit } t$$

$$X_m^i(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+w_m^i(t)}, & i = \text{argmin}_j w_m^j(t) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

So wird der Platz unter den Spielern entsprechend dem Voronoi-Diagramm der Spielerpositionen aufgeteilt, und innerhalb jedes von ihnen kontrollierten Segments ist die Investition der Spieler in den Platz umgekehrt proportional zu ihrer Entfernung von diesem Platz. Insbesondere kodiert der Platzbesitz eines Offensivspielers implizit Informationen über die Positionierung der Defensive. Wenn sich ein Verteidiger dem Spieler  $i$  nähert, verringert sich die Voronoi-Partition des Spielers  $i$ , was bedeutet, dass mehr Einträge im Spielfeldbesitz-Vektor  $X^i(t)$  Null sind.

Diese Voronoi-Diagramme werden übrigens auch in Computerspielen eingesetzt, um die Spielsituationen zu analysieren.

---

<sup>49</sup>D. Cervone, L. Bornn, K. Goldsberry, *NBA Court Realty*, MIT Sloan Sports Analytics Conference 2016, [http://www.lukebornn.com/papers/cervone\\_ssac\\_2016.pdf](http://www.lukebornn.com/papers/cervone_ssac_2016.pdf).

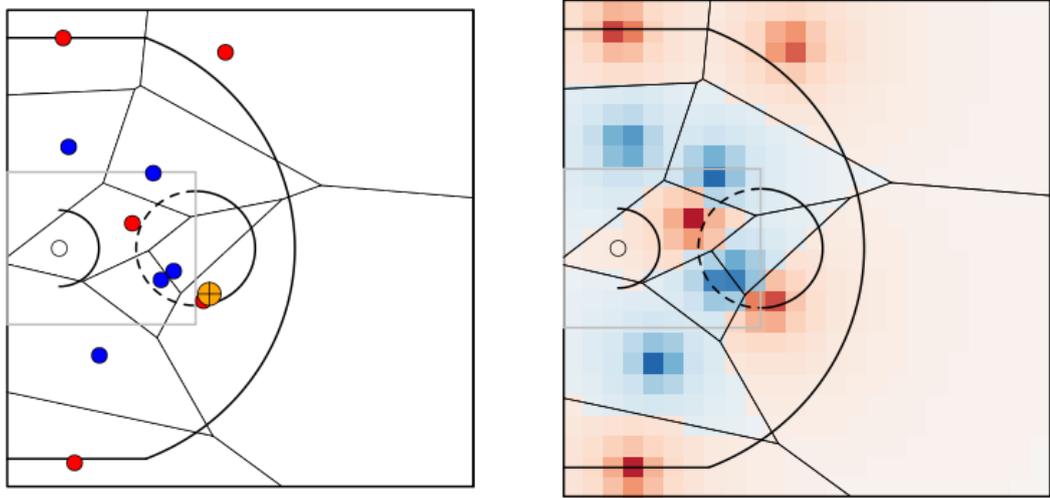


Abbildung 79: Beispiel einer Karte für den 'Besitz' von Spielfeldzellen. Die Kontrolle eines Spielers über jede Spielfeldzelle in seinem Voronoi-Segment (links) ist umgekehrt proportional zu seiner Entfernung von dieser Zelle (rechts).