

52 Modellierung Negativer Zinsen – Nur Bares ist Wahres?

Mathematische Modelle helfen aktuelle Entwicklungen an den Finanzmärkten zu modellieren und können helfen mittels ökonomischen Modellen Erkenntnisse zu gewinnen.

Jörg Kienitz von Acadiasoft Inc., ist Privatdozent an der Bergischen Universität Wuppertal, Adjunct Associate Professor an der Universität Kapstadt und Betreiber der Seite finciraptor.de. Er beschreibt am Beispiel negativer Zinsen wie Mathematik hilft, aktuelle Finanzmarktphänomene zu modellieren.

Negative Zinsen sind uns allen mittlerweile wohlbekannt. Letztlich erfahren wir dies, wenn wir Zinsen für Tagesgeld vergleichen oder über „Verwahrentgelte“ für Einlagen lesen. Wie kam es zu dieser Situation? Im Zuge der Finanzkrise 2007 musste die Europäische Zentralbank die Stabilität in der Eurozone erhalten. Dabei setzte sie auf die Erhöhung der Geldbasis durch den Kauf von Staatsanleihen („Quantitative Easing“) und die Senkung des Leitzinses. Letzterer besagt, zu welchem Zinssatz sich Geschäftsbanken Geld leihen können. Die eingeleitete schrittweise Senkung zeigte allerdings nicht die erhoffte Wirkung, was zu weiteren Senkungen führte und schließlich dazu, dass dieser Zins negativ wurde. Derzeit¹⁸ steht er bei -0.5 %.

Länder wie die Schweiz, Schweden, Dänemark und Japan haben negative Zinsen bereits angewendet. Im Falle der Schweiz resultierte dieser Schritt aus starken Geldzuflüssen, die mangels Alternativen in schweizerische Zinsanleihen investiert wurden. Die Auswirkungen für den Export oder die auch die Verteuerung des Konsums waren erheblich. Dem wirkte die schweizerische Nationalbank entgegen, indem sie den Leitzins unter 0 % senkte.

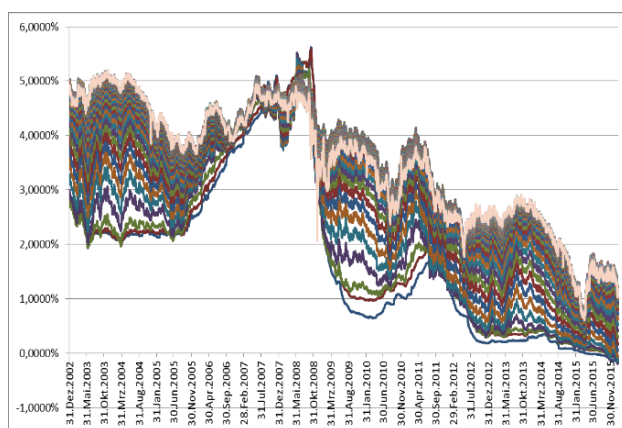


Abbildung 52: Entwicklung unterschiedlicher Zinsraten (Swapraten), EUR im Zeitraum von 31.12.2002 bis 10.11.2015.

¹⁸Stand 14. April 2021

In der mathematischen Modellierung betrachten wir Zinssätze, welche an eine Laufzeit geknüpft sind. Am Markt notieren Zinssätze zu unterschiedlichen Laufzeiten, siehe Abbildung 52. Ein Zinssatz beschreibt die Entwicklung einer Geldmenge, wenn diese für die entsprechende Laufzeit angelegt wird. Aus solchen Zinssätzen werden Zinskurven konstruiert. So sind in Abbildung 53 Zinskurven für konstante Zinsraten von 3% und -3% dargestellt. Außerdem wird die sogenannte Diskontkurve gezeigt. Während man aus der Zinskurve ablesen kann wie sich 1 € für unterschiedliche Laufzeiten entwickelt, so lässt sich aus der Diskontkurve ablesen welche Geldmenge notwendig ist um 1 € zu einer Laufzeit zu erhalten, siehe Abbildung 53. Für positive Zinsen ist der Wert kleiner als 1 für negative jedoch größer.

Für die Bestimmung des Wertes eines Zinsgeschäfts unterscheidet man Produkte, die einzig und allein durch die aktuelle Zinskurve bestimmt werden. So kann der Wert eines Instruments, welches jedes Jahr, z.B. am 11.06., einen Zinssatz von 3% und nach 10 Jahren außerdem den Nennwert zahlt, z.B. 100 €, den Wert zu errechnen. Hierzu liest man in der Diskontkurve den entsprechenden Wert ab, multipliziert diesen mit dem Zins (Nennwert · 3% = 3 €) und addiert diese Werte auf. Final wird der diskontierte Rückzahlungswert dazugerechnet. Für die Diskontkurven aus Abbildung 53 ergeben sich genau 100 €, während im Fall mit negativen Zinsen 171,37 € berechnet werden. Solche Instrumente nennt man auch linear. Darüber hinaus gibt es auch nicht-lineare Instrumente wozu unter anderem Zinsbegrenzer gehören. Die Auszahlungen solcher Instrumente sind nicht-lineare Funktionen eines Zinssatzes, z.B. das Maximum oder Minimum bzgl. eines Begrenzungswertes.

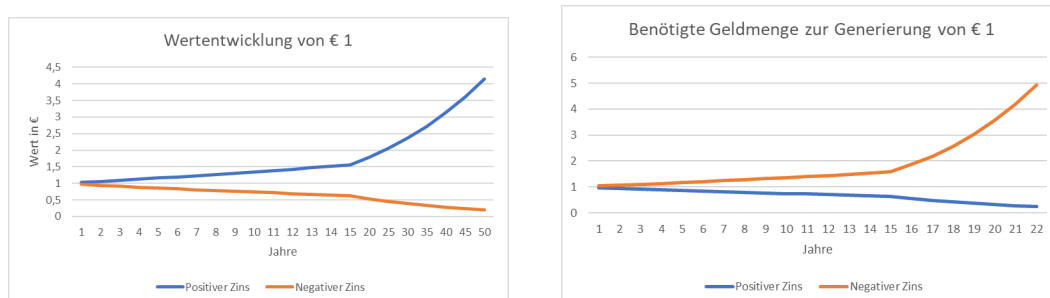


Abbildung 53: links: Zinskurve für eine konstante Zinsrate von 3% (blau) und -3% (orange); rechts: Diskontierungsfaktor für eine konstante Zinsrate von 3% (blau) und -3% (orange).

Es ist nicht möglich - auch nicht im linearen Fall - diesen Wert für alle zukünftigen Zeitpunkte zu berechnen. Die Zinskurve ist ein dynamisches Objekt, welches durch Handel an Geld- und Kapitalmärkten sowie Entscheidungen der Geschäfts- und Zentralbanken oder Investitionen von Pensionskassen und Funds getrieben wird. Dies wird in Abbildung 52 gezeigt, wo Zinssätze für verschiedene Laufzeiten in der Zeit vom 31.12.2002 bis 10.11.2015 gezeigt werden. Sowohl die Höhe als auch das Verhältnis der Zinsraten zueinander schwankt.

Daher werden in der Finanzmathematik dynamische, stochastische Modelle verwendet, die Entwicklungen von Zinsraten beschreiben. Preise von Zinsprodukten werden dann als Erwartungswerte bzgl. von Wahrscheinlichkeitsverteilungen berechnet. Für Zinsprodukte wird gewährleistet, dass die modellierten Zinsraten genau getroffen werden. Jetzt sehen wir auch warum Produkte, die nur die aktuellen Zinsraten benötigen, linear heißen. Dies ergibt sich aus der Linearität des Erwartungswertes. Für nicht-lineare Funktionen ist die Berechnung nicht so einfach. Hierfür wird die Kenntnis der Verteilung benötigt um den Wert bestimmen zu können. Hier spielen dann auch weitere Parameter wie Volatilität, Schiefe oder Wölbung eine Rolle, die die Verteilung bestimmen.

Diese stochastische Entwicklung der Zinsraten ist sehr kompliziert. Es ist möglich eine Zinsrate, mehrere Zinsraten oder die gesamte Zinskurve, also unendlich viele Zinsraten gleichzeitig zu modellieren. Im einfachsten Fall modellieren wir die stochastische Entwicklung eines stochastischen Faktors und betrachten die Kurve als Funktion dieses Faktors. Die Entwicklung wird durch einen deterministischen Teil, den sog. Drift und einen stochastischen Teil beschrieben. Letzterer wird häufig als Brownsche Bewegung angenommen. In diesem Fall spricht man beim stochastischen Teil von der Diffusion.

Die Dynamik kann durch geschickte Wahl der Diffusionskomponente in verschiedener Weise gesteuert werden¹⁹. Zum Beispiel kann diese Komponente als Multiplikation mit einer konstante und der zufälligen Realisierung der Brownschen Bewegung aber einer Funktion des aktuellen Zustands und der Zeit modelliert werden. Möchte man eine Normalverteilung nutzen, so wählt man den ersten Ansatz. Man sagt auch die stochastische Bewegung reagiert absolut auf die zufällige Bewegung der treibenden Brownschen Bewegung. Wählt man hingegen den zweiten Ansatz so erhält man eine Logarithmisch-Normale Verteilung, siehe auch Abbildung 54 (linke Seite). Interessant ist, dass diese Wahl auch den Definitionsbereich der stochastischen Dynamik einschränkt. Im ersten Fall kann jede reelle Zahl realisiert werden. Wählt man die zweite Möglichkeit, so ist das nicht mehr möglich und es können nur positive reelle Zahlen realisiert werden.

Wie können wir nun den Bogen zu der Modellierung von Zinsraten schlagen? Zu Beginn deren Modellierung wurden einfache Modelle basierend auf Normalverteilungen genutzt. Zu dieser Zeit aber waren negative Zinsen ein Artefakt und resultierten aus der Einfachheit der Modelle. Jedoch achtete man darauf möglichst Modellparameter zu verwenden, die nur eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit für die Realisierung negativer Zinsen erlaubten. Später wurden diese Modelle zur Vermeidung negativer Zinsen weiterentwickelt. Gleichzeitig wurden mehr, bzw. unendlich dimensionale Modelle betrachtet, um Verhältnisse von Zinsraten zueinander abzubilden. Das Augenmerk lag vielmehr darin andere Marktgegebenheiten abzubilden, z.B. den sogenannten Skew. Dies beschreibt den Umstand, dass zur Berechnung nicht-linearer Produkte die Eigenschaften wie Schiefe oder Wölbung mit betrachtet werden müssen, siehe Abbildung 54 (rechte Seite). Hierzu bot es sich an Mischungen von Normalverteilung und Logarithmischen-Normalverteilung zu nutzen. Dies führt zum Beispiel zu sogenannten

¹⁹Der Drift wird aus finanzmathematischen Gründen durch die Diffusionskomponente und die aktuelle Zinskurve bestimmt.

verschobenen Diffusionen. Diese Hilfsmittel erlaubten eine bessere Modellierung des Skew, resultierte aber wieder in der Möglichkeit der Realisierung negativer Zinsraten.

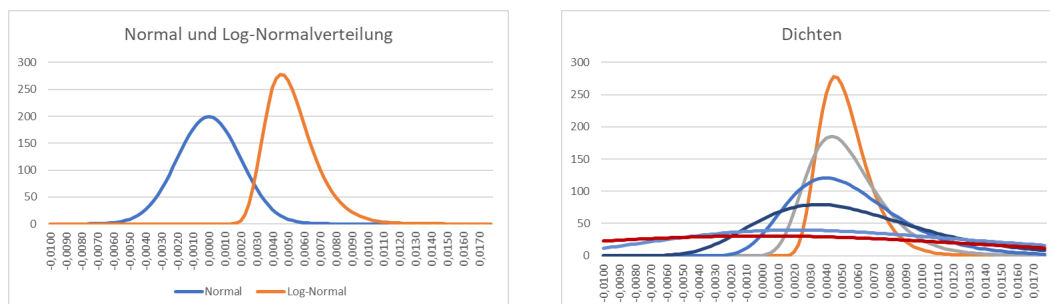


Abbildung 54: links: Normale und Logarithmisch-Normal Verteilung; rechts: Verteilung zu Logarithmisch-Normalen (orange), Vershobenen Diffusionen mit verschiedenen Shiftparametern und Normaler Verteilung (rot).

In der aktuellen Marktsituation greift man wieder auf solche Modelle zurück, die explizit negative Zinsen zulassen. Sicherlich kann der Zinssatz nicht beliebig kleine Werte annehmen, was die Verwendung der Normalverteilung fraglich erscheinen lässt. Letztlich kann man sich allerdings wieder mit der Wahl der Parameter aus der Schlinge ziehen und versuchen, Wahrscheinlichkeiten unterhalb eines Schwellenwertes sehr klein werden zu lassen. Die verschobenen Diffusionen erlauben hier eine explizite, direkte Modellierung des Schwellenwertes. In diesen Fällen können negative Werte bis hin zum Schwellenwert modelliert werden, siehe Abbildung 54 (rechte Seite).

Es sei bemerkt, dass die verwendeten stochastischen Modelle und numerischen Methoden unproblematisch hinsichtlich negativer Zinsen sind. Es ergeben sich aber erhebliche Probleme bei der ökonomischen Modellbildung. Zum Beispiel sei hier der Schwellenwert genannt. Eine theoretische untere Grenze kann durch die Existenz von Bargeld bestimmt werden, die dann von Abhebegebühren und Lagerkosten abhängt. Neben dieser physischen Untergrenze versucht man auch, mittels komplexerer Modelle ökonomisch plausiblere Werter zu etablieren. Für den Bargeldfall nimmt man Abhebegebühren von 2% und Lagerungskosten von 1% pro Jahr an, beträgt die untere Grenze $-2,98\%$ pro Jahr, $-(100\% - 2\%) \cdot (100\% - 1\%) = -0,98 \cdot 0,99 = -2,98\%$ pro Jahr. Ökonomische Schwierigkeiten und Implikationen negativer Zinsen können modellhaft mathematisch betrachtet werden und (komplexe) numerische und stochastische Methoden stehen zur Verfügung, um diese Modelle umzusetzen. Allerdings beruhen diese Modelle unter anderem auf ökonomischen und politischen Annahmen, die natürlich nicht mathematisch verifiziert werden können. Hier ist ein enges Zusammenspiel der unterschiedlichen Disziplinen notwendig. Da die Thematik Auswirkungen auf Gesellschaften und schließlich Menschen hat sollte mit großer Sorgfalt und offener Kommunikation und Darstellung von Annahmen umgegangen werden. Letztlich muss jeder die im Titel gestellte Frage selbst beantworten. Allerdings kann mittels des Bargeldes eine untere Schranke für negative Zinsraten etabliert werden, die ohne „Bares“ so nicht hält.