

26 Faire Schulplatzvergabe: von Boston in die ganze Welt

Wie findet man eigentlich gute Zuordnungen? Welche Schülerin erhält einen Platz an ihrer Wahlschule? Welcher Schüler erhält seinen Wahlkurs? Welche Mannschaften sollen in Turnieren gegeneinander antreten? Und wann ist eine Zuordnung eigentlich gut?

Dr. Ágnes Cseh vom Hasso-Plattner-Institut, Potsdam und Prof. Dr. Nicole Megow von der Universität Bremen berichten darüber, wie man gute Zuordnungen findet:

Gute und faire Zuordnungen werden ständig und in den verschiedensten Bereichen des Lebens gebraucht. Welche Schülerin erhält einen Platz an ihrer Wahlschule? Wie werden Schüler auf ihre Kurse verteilt? Welcher Bewerber wird an welcher Universität zugelassen? Welche Mannschaften sollen in Turnieren gegeneinander antreten? Wie werden Wohnheimplätze vergeben? All diese Fragen haben gemein, dass eine beschränkte Menge von Ressourcen den Bewerberinnen und Bewerbern zugeordnet werden soll und hierbei unterschiedliche Präferenzen zu berücksichtigen sind.

Mathematikerinnen und Mathematiker beschäftigen sich mit der Frage, wie man eine gute Zuordnung finden kann. Dafür werden Algorithmen entwickelt, also Verfahren, die solch eine Zuordnung finden können. Doch was ist eigentlich eine gute Zuordnung? Kann man Güte messen und vergleichen?

Betrachten wir als Beispiel die Vergabe von Schulplätzen genauer. Diese funktioniert in verschiedenen Städten und Bundesländern ganz unterschiedlich. Der Trend geht zu zentralisierten Verfahren innerhalb eines Schulbezirks. Hier wird den Familien die Möglichkeit gegeben eine Liste von, sagen wir drei, präferierten Schulen im Schulbezirk anzugeben. Den Schulen und Schultypen sind auch Prioritäten für die Schüler vorgegeben, z.B. nach Leistungsstand oder Länge des Fahrwegs, sowie eine maximale Aufnahmekapazität. Aus diesen Daten soll nun eine möglichst gute Zuordnung von Schülerinnen und Schülern auf Schulen erfolgen. Aber was nun genau gut heißt, ist dabei gar nicht so eindeutig. Es gibt viele mögliche Kriterien, die oft unvereinbar miteinander sind und nicht gleichzeitig perfekt erfüllt werden können. Dementsprechend gibt es für die Schulplatzvergabe mehrere Ansätze.

Boston Algorithmus – die erste Wahl zählt!

Ein einfaches Verfahren sieht wie folgt aus. Man versucht zunächst die Erstwünsche aller Schülerinnen und Schüler zu erfüllen. Dabei werden einige Schulen überangefragt sein und müssen Bewerber abweisen. Haben Bewerber gleich hohe Priorität bei einer Schule so ist ein zufälliges Auswählen nur fair. Was passiert aber mit den Abgewiesenen? Sie werden in einer zweiten Runde möglichst auf ihre Zweitwahl zugewiesen. Ein Teil dieser Schulen ist auch schon voll, und einige Bewerber werden erneut abgewiesen. Nach einer erneuten Runde sind alle Bewerber entweder zugewiesen oder haben ihre Liste von Wahlschulen abgearbeitet und keinen Platz gefunden.

Dieses Verfahren, man nennt es den Boston Algorithmus oder Immediate Acceptance Algorithmus (Algorithmus der sofortigen Annahmeentscheidung), wird oder wurde in vielen Schulbezirken mit zentraler Schulplatzvergabe weltweit verwendet. Ist dies ein gutes Verfahren? Das kommt darauf an, was das Ziel ist. In der Optimierung sprechen wir von einer Zielfunktion, welche es zu maximieren gilt. Ist die Zielfunktion die Anzahl der erfüllten Erstwünsche, dann ist dieses Verfahren optimal. Das heißt, für jede Problem Instanz (jeden möglichen Fall von Schülerwünschen und Schulen mit Prioritäten und Kapazitäten) wird die maximal mögliche Anzahl an Erstwünschen erfüllt. Auf der anderen Seite werden Wahlverlierer in Kauf genommen, das heißt, dass es Schülerinnen oder Schüler gibt, die keine ihrer drei Wahlschulen erhalten, obwohl es eine solche Zuordnung gegeben hätte.

Die Schüler und ihre Eltern wissen, dass sie im Boston Algorithmus eventuell keinen Platz an einer ihrer drei Wahlschulen bekommen. Darüber hinaus ist ihnen klar, dass die Reihenfolge der Schulen extrem wichtig ist. Es kann passieren, dass die Schülerin Lilli die höchste Priorität an ihrer zweitplatzierten Schule A hat, sie wird aber nicht angenommen, weil Schule A ihre Kapazität bereits in der ersten Runde gefüllt hat – eventuell mit Schülern, die an der Schule eine geringere Priorität haben als Lilli. Sie ist berechtigterweise frustriert. Hätte Lilli Schule A auf Platz 1 ihrer Wahlliste gesetzt, wäre sie dort angenommen worden.

Solche Situationen lassen sich durch taktisches Wählen vermeiden. Die Familien sind vom Algorithmus gezwungen, die drei Schulen sehr vorsichtig zu wählen. Viele geben nicht ihre Wunschschule, sondern eine akzeptable, aber eventuell weniger beliebte Schule auf Platz 1 an, um die Chancen zu erhöhen, sich einen Platz gleich in der ersten Runde zu sichern. Das führt dazu, dass der Boston Algorithmus zwar beweisbar die maximal mögliche Anzahl von Schülerinnen und Schülern ihren Erstwahlschulen zuweist, aber diese Erstwahlen gar nicht die tatsächlichen Erstwahlen sind!

Diese Behauptung stammt von Atila Abdulkadiroğlu und Tayfun Sönmez, die 2003 einen vielbeachteten wissenschaftlichen Artikel geschrieben haben, in dem die Stadt Boston als Beispiel erwähnt wird. Noch im selben Jahr bekamen die zwei Wissenschaftler den Auftrag der Stadt Boston, die Schulplatzvergabe dort mathematisch zu analysieren und zu optimieren. Boston hat nach den Vorschlägen der Wissenschaftler den Algorithmus gewechselt, und die Schülerinnen und Schüler können im neuen System ihre wahren Schulpräferenzen ohne taktische Bedenken angeben. In vielen Städten weltweit wird dieses alternative Verfahren erfolgreich angewendet. Der einzige Verlierer ist der Ruf der Stadt: Der alte Algorithmus wurde nach Boston benannt, der Stadt, die ihn als Erste abgewählt hat.

Ein Verfahren gegen den Frust

Wie unterscheidet sich das neue Verfahren vom Boston Algorithmus? Auch hier versucht man Schülerinnen und Schüler jeweils in mehreren Runden auf ihre favorisierte, oder eben Zweit- oder Drittwahl-Schule zuzuweisen. Der entscheidende Unterschied ist, dass hier Entscheidungen nicht sofort und endgültig getroffen werden sondern über

die Runden hinweg noch angepasst werden. Deshalb wird der Algorithmus auch Deferred Acceptance Algorithmus (Algorithmus der verzögerten Annahmeentscheidung) genannt. Wenn Lilli in der ersten Runde ihre Erstwahlschule A nicht bekommen konnte und ihre Zweitwahl B schon voll ist, dann hat sie in der zweiten Runde trotzdem noch die Chance, einen Platz an Schule B zu erhalten, falls dort ein Schüler vorläufig zugeordnet wurde, der die Schulkriterien weniger erfüllt als Lilli.

Dieses Verfahren garantiert, dass es keinen berechtigten Frust gibt; Frust darüber, dass man einen Schulplatz nicht erhält der einem laut Schulprioritäten eigentlich zustünde. Das Ergebnis nennt man auch eine stabile Zuordnung. Tatsächlich werden hier sogar alle Schülerinnen und Schüler auf die für sie beste Schule zugewiesen, solange hierfür keine bessere Schülerin abgewiesen werden muss. Ganz konkret für Lilli bedeutet es, dass sie von Schule A auf keinen Fall eine Absage bekommen kann, nur weil Schule A ihre Kapazität bereits gefüllt hat. Die Absage in einer stabilen Zuordnung ist nur dann berechtigt, wenn Schule A ihre Kapazität mit Schülerinnen und Schülern aufgefüllt hat, die alle mindestens so gut den Schulprioritäten entsprechen wie Lilli.

Stabile Zuordnungen und der Deferred Acceptance Algorithmus wurden zum ersten Mal 1962 von David Gale und Lloyd Shapley in einem wissenschaftlichen Artikel beschrieben. Seitdem spielen sie eine wichtige Rolle bei zahlreichen Anwendungen. Das wurde auch von dem Nobelpreiskomitee so gesehen. Alvin Roth und Lloyd Shapley erhielten im Jahre 2012 den Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften, umgangssprachlich Wirtschaftsnobelpreis genannt, für die von ihnen entwickelte Theorie zu stabilen Zuordnungsverfahren und deren Anwendungen im Design von Marktmechanismen.

Die Rolle der Mathematik

Ist der Deferred Acceptance Algorithmus nun tatsächlich besser als der Boston Algorithmus? Das kommt auf die Ziele an. Wenn Lilli taktik-frei nach ihren wirklichen Wünschen wählen können soll und wenn uns Fairness in dem Sinne wichtig ist, dass es keinen berechtigten Frust geben soll, dann JA.

Dennoch, bei der Untersuchung des Problems der Schulplatzvergabe tauchen viele weitere Fragen auf, die abgewogen werden müssen. Darf es x berechtigt frustrierte Schüler geben, wenn dafür y Wahlverlierer vermieden werden können, oder wenn dadurch z Schülerinnen mehr ihre Erstwahl bekommen? Wie viele Wahlverlierer darf ein zusätzlich erfüllter Erstwunsch kosten?

Dies sind Entscheidungen, die nicht wir Mathematikerinnen und Mathematiker treffen, sondern Behörden, Politikerinnen, Elternvertreter, usw. Wir bieten dabei Entscheidungsunterstützung an und helfen beim Abwägen von gegensätzlichen Zielen und der Auswahl passender Verfahren. Dies tun wir, indem wir Probleme analysieren, Verfahren und mögliche Schwächen identifizieren und diese, wenn möglich, beheben indem wir neue Verfahren entwickeln. Außerdem garantieren wir als Mathematiker durch formale Beweise, dass die Eigenschaften der Algorithmen tatsächlich zutreffen. Damit fair auch wirklich fair ist.